Aufgabenstellung:

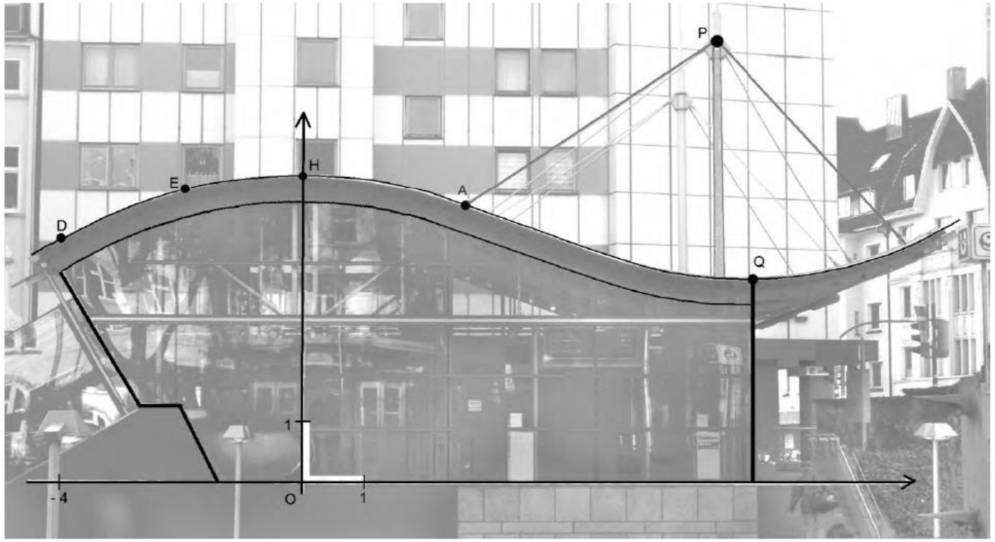


Abbildung 1

Abbildung 1 zeigt das Eingangsgebäude zu einer U-Bahn-Haltestelle. Auf dem Foto schaut man frontal auf eine ebene Glasfläche, die sich unter dem geschwungenen Dach befindet. Eine Längeneinheit in dem eingezeichneten Koordinatensystem entspricht 1 m.

Der höchste Punkt der Dachoberkante befindet sich in diesem Koordinatensystem bei $H(0\,|\,5{,}0)$ und der tiefste Punkt bei $Q(7{,}3\,|\,3{,}3)$. Auch die Punkte $D(-4\,|\,4)$ und $E(-2\,|\,4{,}75)$ liegen auf der Dachoberkante. Der Punkt A liegt an der Stelle $x = 2{,}7$.

Die Profillinie der Dachoberkante hat eine geschwungene Form, die im Folgenden durch eine ganzrationale Funktion modelliert werden soll.

a) Die Profillinie hat im Bereich $-4 \le x \le 4$ näherungsweise die Form einer Parabel 2. Grades.

Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Parabel mit dem Hochpunkt H, die durch den Punkt D verläuft.

Prüfen Sie, ob der Punkt E auf dieser Parabel liegt.

[Zur Kontrolle: $p(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^2 + 5$.]

(4 Punkte)

b) Um den Verlauf der gesamten Profillinie der Dachoberkante im Bereich von $-4{,}5 \le x \le 10{,}5$ zu modellieren, wird im Folgenden die Parabelgleichung aus a) erweitert auf eine ganzrationale Funktion f_a mit $f_a(x) = a \cdot x^4 - \frac{1}{16} \cdot x^2 + 5,\ a > 0$.

(1) *Begründen Sie, warum durch diese Erweiterung die bei der Parabel vorhandene Symmetrie erhalten bleibt.*

(2) Abbildung 2 zeigt die Graphen von f_a für $a = 0{,}0002$, $a = 0{,}0004$ und $a = 0{,}0006$.

Geben Sie an, welcher Parameterwert zu welchem Graphen gehört.

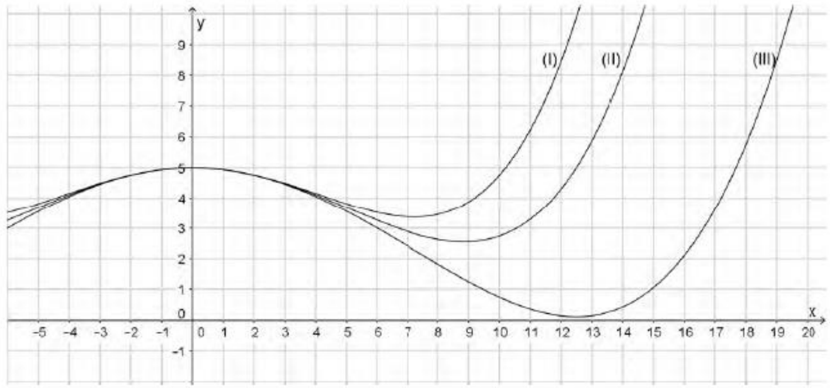


Abbildung 2

(3) *Bestimmen Sie den Tiefpunkt T_a des Graphen von f_a (mit $x \geq 0$) in Abhängigkeit von a.*

Geben Sie an, für welche Werte von a der Tiefpunkt T_a im I. Quadranten des Koordinatensystems liegt.

[Kontrollergebnis: $T_a\left(\sqrt{\frac{1}{32 \cdot a}} \middle| 5 - \frac{1}{32^2 \cdot a}\right)$]

(4) Der Graph von f_a fällt im Bereich zwischen H und T_a monoton.

[Dies muss nicht nachgewiesen werden.]

Die Dachneigung gegenüber der Horizontalen soll zwischen H und T_a im Punkt mit dem stärksten Gefälle höchstens $45°$ betragen.

Begründen Sie, dass dies bedeutet, dass die Steigung der Wendetangente ≥ -1 sein muss.
Ermitteln Sie, für welche Werte von a diese Bedingung erfüllt ist.

[Kontrollergebnis: Der x-Wert des Punktes mit dem stärksten Gefälle ist $\sqrt{\frac{1}{96 \cdot a}}$.]

(5) Damit der Graph von f_a ein Modell für die Dachoberkante darstellt, wird gefordert, dass im Bereich $x \geq 0$ der y-Wert des Tiefpunkts T_a mindestens 3,3 betragen und der x-Wert des Wendepunkts mindestens 4 sein soll.

Bestimmen Sie den Bereich für a, in welchem beide Bedingungen erfüllt sind.

(2 + 3 + 8 + 6 + 5 Punkte)

Im Folgenden wird die Profillinie der Dachoberkante im Bereich $-4{,}5 \leq x \leq 10{,}5$ durch den Graphen der auf IR definierten Funktion f mit $f(x) = 0{,}0006 \cdot x^4 - \frac{1}{16} \cdot x^2 + 5$ modelliert.

Das Eingangsgebäude ist mit Glas verkleidet. Die eingezeichnete Oberkante der Glasfläche wird im Koordinatensystem von Abbildung 1 im Bereich von $-4 \leq x \leq 7{,}3$ durch die auf IR definierte Funktion h mit $h(x) = 0{,}0006 \cdot x^4 - \frac{1}{16} \cdot x^2 + 4{,}5$ modelliert.

c) Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass es sich bei der in Abbildung 1 umrahmten Glasfläche um eine durchgehende ebene Fläche handelt, die nicht durch Rahmen und Streben unterbrochen wird.

(1) *Berechnen Sie den Inhalt der Glasfläche von der y-Achse bis zur eingezeichneten Kante durch den Punkt Q in der Ansicht aus Abbildung 1.*

(2) *Beschreiben Sie eine mögliche Lösungsidee zur Bestimmung des Inhalts der umrahmten Glasfläche links von der y-Achse. Geben Sie dabei alle nötigen Ansätze an, die Berechnung konkreter Werte wird hingegen nicht erwartet.*

(3) *Begründen Sie, dass die Fläche zwischen der Glasoberkante und der Dachoberkante im Bereich von $-4 \leq x \leq 7{,}3$ inhaltsgleich ist zur Fläche eines Rechtecks der Länge* 11,3 *und der Höhe* 0,5.

(6 + 5 + 4 Punkte)

d) Oberhalb des Daches sind geradlinig verlaufende Stahlseile angebracht. Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass ein Stahlseil von $A(2{,}7 \mid f(2{,}7))$ nach $P(6{,}7 \mid 7{,}2)$ verläuft.

Das Stahlseil wird für $2{,}7 \leq x \leq 6{,}7$ durch eine Gerade g modelliert.

Bestimmen Sie rechnerisch die Größe des Winkels, den die Gerade g mit der Tangente an den Graphen von f in A einschließt.

(7 Punkte)

Aufgabenstellung:

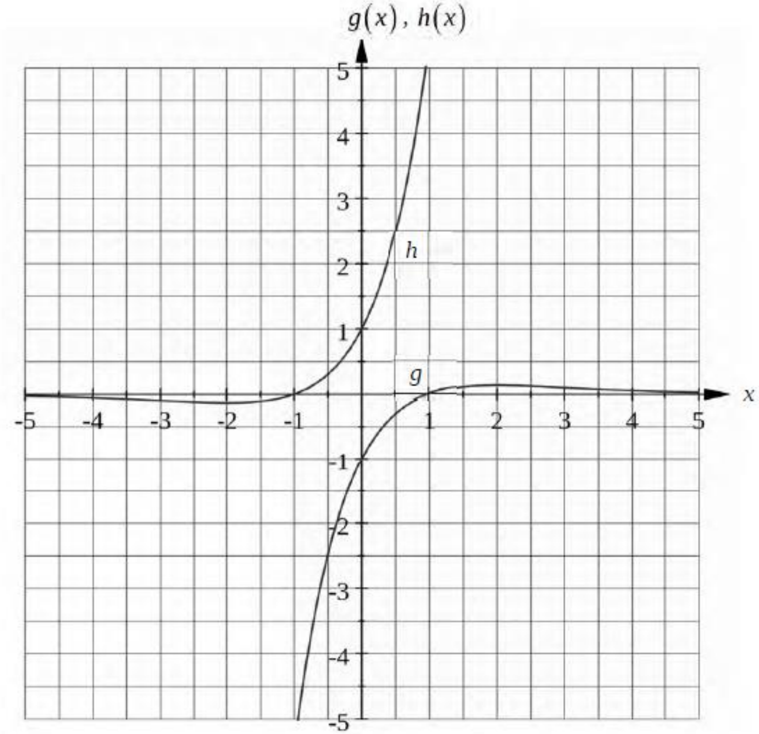
Für jede von Null verschiedene reelle Zahl a ist f_a die Funktion mit der Gleichung

$f_a(x) = \left(x + \frac{1}{a}\right) \cdot e^{ax},\ x \in \mathbb{R}$.

Für $a = -1$ erhält man die Funktion g mit der Gleichung $g(x) = (x-1) \cdot e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$

und für $a = 1$ die Funktion h mit der Gleichung $h(x) = (x+1) \cdot e^{x},\ x \in \mathbb{R}$.

Die Graphen von g und h sind in der *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

a) (1) *Zeigen Sie, dass $x_0 = -\frac{1}{a}$ die einzige Nullstelle von f_a ist.*

(2) *Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten der lokalen Extrem- und Wendepunkte des Graphen der Funktion f_a.*

Geben Sie die Art der Extrempunkte an.

[Zur Kontrolle: $f_a'(x) = e^{ax} \cdot (2 + a\,x)$.]

(2 + 15 Punkte)

b) (1) Der Graph der Funktion f_a schneidet die y-Achse im Punkt S_a.

Geben Sie die Koordinaten von S_a an.

(2) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t_a an den Graphen der Funktion f_a im Punkt S_a.*

[Zur Kontrolle: $t_a(x) = 2x + \frac{1}{a},\ x \in \mathbb{R}$.]

(3) Die Tangente t_a und die Koordinatenachsen bilden ein Dreieck.

Berechnen Sie die Dreiecksfläche $D(a)$ in Abhängigkeit von a.

(2 + 2 + 4 Punkte)

c) (1) *Ermitteln Sie mit Hilfe von Integrationsverfahren eine Stammfunktion der Funktion f_a.*

[Zur Kontrolle: Zum Beispiel ist die Funktion F_a mit der Gleichung

$F_a(x) = \frac{1}{a} x \cdot e^{ax} + 2,\ x \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von f_a.]

(2) *Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a den Inhalt $A(a)$ der Fläche, die von dem Graphen der Funktion f_a und den beiden Koordinatenachsen eingeschlossen wird.*

Berechnen Sie alle a, für die $A(a) = e$ gilt.

[Zur Kontrolle: $A(a) = \frac{1}{e \cdot a^2}$.]

(4 + 5 Punkte)

d) Man betrachtet nun die Funktionen g und h.

(1) *Weisen Sie nach, dass* $g(-x) = -h(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt.*

Interpretieren Sie diese Aussage geometrisch.

(2) *Beweisen Sie: Es gilt* $h(x) > g(x)$ *für alle* $x \geq 0$.

(3) Für alle $u > 0$ sei p_u die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $P_u(u \mid 0)$.

Es sei $I(u)$ der Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen g und h, der y-Achse und p_u eingeschlossen wird.

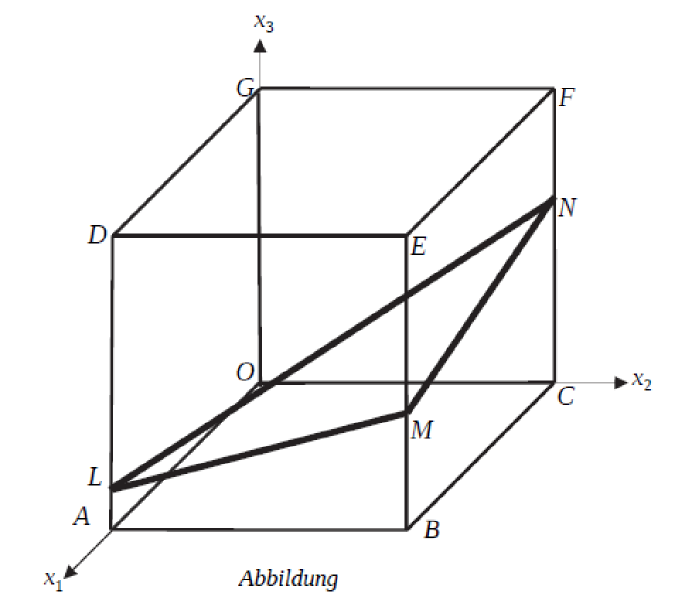
Zeigen Sie: Es gilt $I(u) = u \cdot (e^u + e^{-u})$ *für alle* $u > 0$.

Begründen Sie, dass die Funktion I *mit der Gleichung* $I(u) = u \cdot (e^u + e^{-u}), u > 0$, *streng monoton steigend ist.*

(4 + 4 + 8 Punkte)

Aufgabenstellung:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $O(0|0|0)$, $A(8|0|0)$, $B(8|8|0$ $C(0|8|0)$, $D(8|0|8)$, $E(8|8|8)$, $F(0|8|8)$ und $G(0|0|8)$ Eckpunkte eines Würfels $OABCDEFG$. Außerdem sind die Punkte $L(8|0|1)$, $M(8|8|3)$ und $N(0|8|5)$ gegeben (siehe *Abbildung*).



Abbildung

a) (1) *Zeigen Sie, dass das Dreieck LMN gleichschenklig ist.*

(2) *Zeigen Sie, dass das Dreieck LMN nicht rechtwinklig ist.*

(3) *Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks LMN.*

[Zur Kontrolle: Der Flächeninhalt des Dreiecks *LMN* beträgt $24 \cdot \sqrt{2}$ [FE].]

(4 + 4 + 5 Punkte)

b) (1) *Ermitteln Sie eine Parameter- und eine Koordinatengleichung der Ebene H, die die Punkte L, M und N enthält.*

[Mögliches Ergebnis für die Koordinatengleichung: $H: x_1 - x_2 + 4x_3 = 12$.]

(2) *Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide LMND.*

[Zur Kontrolle: Das Volumen der Pyramide *LMND* beträgt $74,\overline{6}$ [VE].]

(3) *Berechnen Sie, wie viel Prozent des Würfelvolumens das Pyramidenvolumen einnimmt.*

(7 + 6 + 3 Punkte)

c) (1) *Skizzieren Sie in der Abbildung das Schnittgebilde, das die Ebene H mit dem Würfel bildet.*

Das Schnittgebilde von Ebene und Würfel ist eine Raute.

(2) *Untersuchen Sie, ob der Punkt $S(2|6|4)$ in der Raute liegt.*

(3) *Untersuchen Sie, ob es einen Punkt auf der Geraden AB gibt, der von dem Punkt S den Abstand 7 [LE] besitzt.*

(3 + 3 + 7 Punkte)

d) Es gibt genau eine Gerade k durch M, die die Geraden LN und GF (außerhalb des Würfels) schneidet.

(1) *Begründen Sie, dass die Gerade k in der Ebene H liegt.*

(2) *Bestimmen Sie die Koordinaten eines zweiten Punktes der Geraden k.*

(4 + 4 Punkte)

Aufgabenstellung:

Die Nutzung von sozialen Netzwerken wird immer beliebter. Dabei nutzen immer mehr Jugendliche verschiedene soziale Netzwerke. Es wird davon ausgegangen, dass 30 % aller Jugendlichen das (fiktive) soziale Netzwerk „Freundschaftsbuch“ nutzen.
Dieser Prozentsatz soll im Folgenden als Wahrscheinlichkeit dafür verwendet werden, dass eine zufällig befragte jugendliche Person „Freundschaftsbuch“ nutzt.

a) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 zufällig ausgewählten Jugendlichen*
   (1) *genau 33 Jugendliche „Freundschaftsbuch“ nutzen,*
   (2) *höchstens 25 Jugendliche „Freundschaftsbuch“ nutzen,*
   (3) *die Anzahl der jugendlichen Nutzer, die „Freundschaftsbuch“ nutzen, einem Wert entspricht, der sich um maximal 5 vom Erwartungswert unterscheidet.*

(2 + 3 + 5 Punkte)

b) *Ermitteln Sie (ggf. durch Probieren), welche positive Anzahl an Jugendlichen mindestens zufällig ausgewählt werden muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % maximal einen Jugendlichen antrifft, der „Freundschaftsbuch“ nutzt.*

(6 Punkte)

c) In einer Schule gibt es zur schulinternen Kommunikation ein eigenes Netzwerk, das sowohl von Jugendlichen genutzt wird, die „Freundschaftsbuch“ nutzen, als auch von Jugendlichen, die „Freundschaftsbuch“ nicht nutzen. Dabei ist in beiden Gruppen der Anteil derjenigen, die das schulinterne Netzwerk nutzen, identisch. Im Folgenden wird dieser Anteil mit h bezeichnet und auch als Wahrscheinlichkeit für den jeweiligen Fall verwendet.

   (1) *Zeigen Sie, dass man den Anteil der Jugendlichen, die genau eines dieser Netzwerke nutzen, mit Hilfe des Terms* $0,3\cdot(1-h)+0,7h$ *beschreiben kann, und erklären Sie die einzelnen Bestandteile des Terms.*

   (2) *Berechnen Sie den Anteil aller Jugendlichen, die das schulinterne Netzwerk nutzen, wenn der Anteil der Jugendlichen, die genau eines dieser Netzwerke nutzen, bei 0,4 liegt.*

   (3) *Berechnen Sie für* $h=0,25$ *die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte jugendliche Person mindestens eines der beiden Netzwerke nutzt.*

   (4) Eine zufällig ausgewählte jugendliche Person nutzt das schulinterne Netzwerk.
   Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass sie „Freundschaftsbuch“ nicht nutzt, und erklären Sie, wieso dieser Wert auch ohne einen Ansatz über bedingte Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden kann.

(5 + 2 + 3 + 4 Punkte)

d) Die Schülervertretung möchte, dass der Nutzungsgrad des schulinternen Netzwerks verbessert wird. Dazu soll mit Aktionen das schulinterne Netzwerk bekannter gemacht werden. Nach einem Jahr möchte die Schülervertretung die Vermutung überprüfen, dass der Nutzungsgrad von vormals 25 % gestiegen ist, und möchte dazu 50 zufällig ausgewählte Jugendliche der Schule befragen.

   (1) *Geben Sie eine geeignete Nullhypothese an und ermitteln Sie eine passende Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau von* $\alpha=0,05$.

   (2) Bei der Befragung kommt heraus, dass 19 Jugendliche das schulinterne Netzwerk nutzen.
   Beurteilen Sie die Situation aus Sicht der Schülervertretung.

Zum Signifikanzniveau von $\alpha = 0,025$ ergibt sich die Entscheidungsregel: „Verwirf die Nullhypothese, falls 20 oder mehr Jugendliche das schulinterne Netzwerk nutzen.“

(3) In den Abbildungen 1 – 4 sind die Wahrscheinlichkeiten der jeweils angegebenen Binomialverteilung als Säulen dargestellt. Die Höhe der Säule zum Wert k entspricht dabei $P(X = k)$.

Stellen Sie den Bereich, in dem die Nullhypothese abgelehnt wird, in Abbildung 1 grafisch dar.

(4) *Beschreiben Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens für den Fall, dass der Nutzungsgrad in Wirklichkeit bei 40 % liegt.*

(5) Bei gleich bleibender Entscheidungsregel und steigendem Nutzungsgrad wird die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art immer kleiner.

Erklären Sie, inwieweit dies an den Abbildungen 2 bis 4 abgelesen werden kann.

(6 + 2 + 3 + 5 + 4 Punkte)

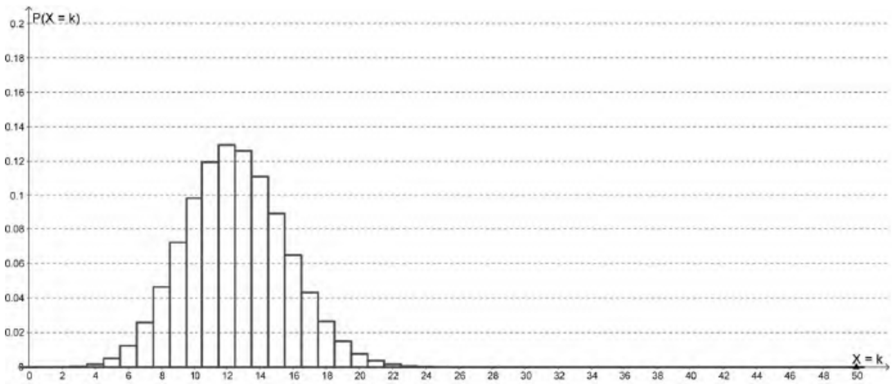


Abbildung 1: Binomialverteilung für $p = 0,25$ und $n = 50$

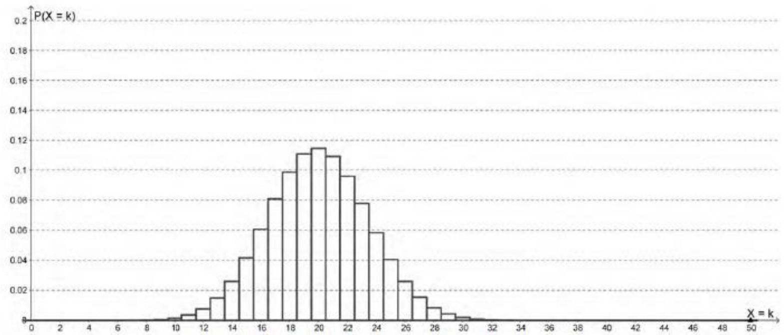


Abbildung 2: Binomialverteilung für $p = 0,4$ und $n = 50$

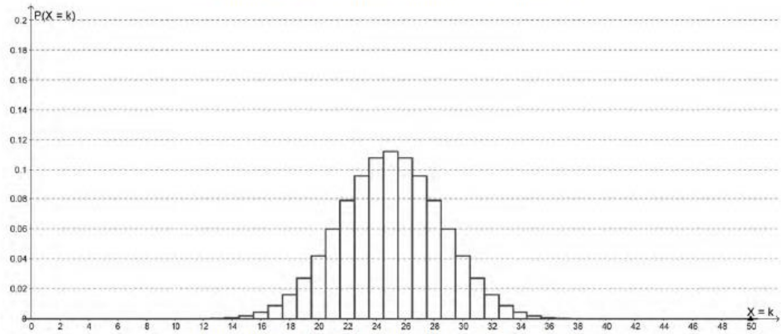


Abbildung 3: Binomialverteilung für $p = 0,5$ und $n = 50$

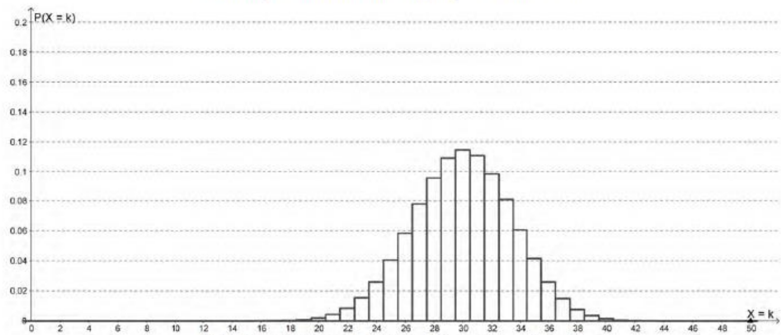


Abbildung 4: Binomialverteilung für $p = 0,6$ und $n = 50$

Beste Grüße und bleibt gesund,

C.Feldmann

19.03.2020